

$$\begin{cases} Q = [\bar{u}_1, \bar{u}_2] \\ R := Q^T A \end{cases}$$

BDN à partir de GS sur $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

→ voir les solutions dans les notes
manuscrites

Dans cette séance on va voir :

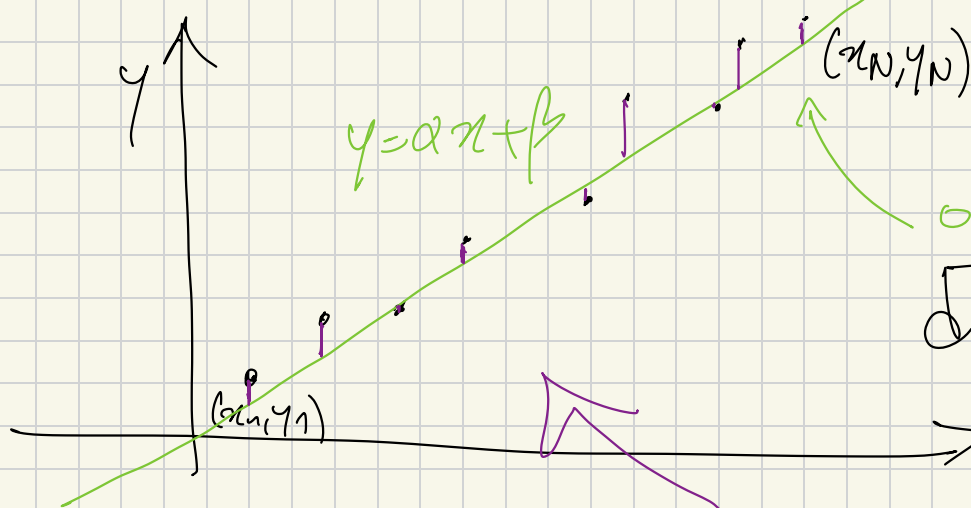
GS.12

(i) la droite de régression → application de la méthode des MC

(ii) la diagonalisation de matrices symétriques ← diagonalisation + GS

Application de la méthode des MC

Imaginons que l'on a une collection de points $\mathcal{P} = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\} \subseteq \mathbb{R}^2$



on aimerait trouver la meilleure droite, qui approxime le mieux les points dans $\mathcal{P}: (*) y = \alpha x + \beta$

↑ inconnues !!

Pour nous, ça veut dire que les différences dans

Valeur prédite par (*)	Valeur réelle
$\alpha x_1 + \beta$	y_1
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha x_N + \beta$	y_N

soient les plus petites possibles.

erreur d'approximation quadratique

$$\rightarrow \mathcal{E}^2 := (\alpha x_1 + \beta - y_1)^2 + \dots + (\alpha x_N + \beta - y_N)^2$$

on veut $\mathcal{E}^2$ le plus petit possible

= somme des carrés des longueurs de barres verticales

$$\frac{\text{Obs:}_2}{\varepsilon} = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \right\|^2$$

Alors trouver $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ qui minimisent ε^2 est équivalent à trouver une sol de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{au sein des MC} \\ A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Exemple / Exercice | Calculer la droite de régression de
 $S = \{(0, 6), (1, 0), (2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sol: $y = -3x + 5$

Solve $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← incompatible
 au sens des MC

$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\bar{n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_b$

On veut résoudre l'EN:

$\underbrace{A^T A \cdot \bar{n} = A^T \cdot b}_{SBL \text{ compatible}}$ ←

$A^T A$ $A^T \cdot b$

↓ ↓

$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

→ $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$y = -3x + 5$ ←
 droite de régression

[Exercice] Calculer la droite de régression de
 $S = \{(-6, -1), (-2, 2), (1, 1), (7, 6)\}$

Chapitre 14 : Diagonalisation de matrices symétriques

[Rappel] $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique si $A = A^T$
 $M \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale si $M^T M = I_n$

[Rk] M orthogonale + carrée $\Rightarrow$ inversible et $M^T = M^{-1}$

[Lemme 2.1] Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $(A^T \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (A \vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

[En conséquence, A symétrique ssi $(A \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (A \vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

[Corollaire 7] Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors
 $(M \vec{x}) \cdot (M \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Théorème spectral

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

(Thm 14.9)

A symétrique $\iff \exists Q \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale
telle que $Q^T A Q$ est
diagonale

$\Leftarrow$ C'est pas difficile, $\Rightarrow$ Omise $\leftarrow$ Omets la preuve en tout cas

On dit dans ce cas que A est orthogonalement diagonalisable.

$\iff$ Une BON de $\mathbb{R}^n$
formée de vecteurs
propres de A

Notre but: pour A symétrique, calculer la BON de $\mathbb{R}^n$
formée de vecteurs propres de A . $\underbrace{\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}}$

①

$$Q := [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$$

② Si λ_i est la valeur propre de A associée à $\bar{v}_i$, alors

$$Q^T A \cdot Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D \Rightarrow A = Q D Q^T$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow A = Q D Q^T = \lambda_1 \vec{v}_1 \vec{v}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \vec{v}_n^T$$

(Décomposition spectrale de A)

Comment calcule-t-on Q et D?

① Calculer racines de $\det(A - \lambda \cdot I_n)$

② Calculer une base B_λ de $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ pour λ valeur propre.

③ Appliquer GS à $B_\lambda \rightsquigarrow B'_\lambda$ BON de E_λ

l'union des B'_λ donne la BON de vecteurs propres.

Exemple/Exercice
14.4

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

calculer la

décomposition spectrale.

→ Voir la solution dans les notes,